

15-2/

## 湖泊三维风生流隐式差分模型的研究

黄平<sup>1</sup> 毛荣生<sup>2</sup>

1: 中山大学环境科学系, 广州 510275; 2: 武汉水利电力大学河系, 武汉 430072

p 343. 3

**摘要** 建立了湖泊三维风生流的隐格式差分模型, 通过对该模型计算稳定性的分析发现, 它的时间步长的取值具有较大的灵活性, 该模型被用于武汉市墨水湖的风生流模拟, 实例计算表明该模型计算结果合理, 能较好地反映湖泊风生流的流态特征。

**关键词** 墨水湖, 风生流, 隐格式差分, 三维数值模拟

湖泊

在过去十多年中, 三维有限差分模型被广泛应用于河口、海湾、湖泊与水库的水流模拟。在这众多模型里, 大多采用显格式的差分形式<sup>[1-4]</sup>, 因此计算时, 其时间步长不能任意选取, 要服从著名的 CFL 稳定性标准的限制。

在 Backhaus 研究<sup>[5]</sup>的基础上, 本文提出了一个计算三维水流运动的隐格式差分模型, 在实际计算中, 该模型的时间步长可选取较大的数值, 并能保证数值计算的稳定性, 模型的计算结果首先被 Koutitas 等解析公式<sup>[6]</sup>所检验, 然后, 便被用于模拟武汉市墨水湖的风生流状况。

## 1 基本控制方程

假定水体各处的密度相同, 垂向(水深方向)上的压力服从静水压强分布, 于是在直角坐标系下的三维水流运动可用如下方程描述。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + A_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + A_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (5)$$

式中,  $\eta$  为水位(坐标平面至水面高度);  $h$  为水深(坐标平面至底面距离);  $u, v, w$  分别为  $x, y, z$  方向上的流速分量;  $t$  为时间;  $g$  为重力加速度;  $f$  为柯氏参数;  $P$  为水压;  $\rho$  为水的密度;  $A_1$  为平面涡动粘滞系数;  $A_2$  为垂向涡动粘滞系数。

收稿日期: 1995-08-12; 收到修改稿日期: 1996-02-23

作者简介: 黄平, 男, 1957 年生, 副教授, 1983 年毕业于武汉水利电力大学环境工程系, 获博士学位, 主要从事环境数学模拟工作, 迄今已发表论文 20 余篇。

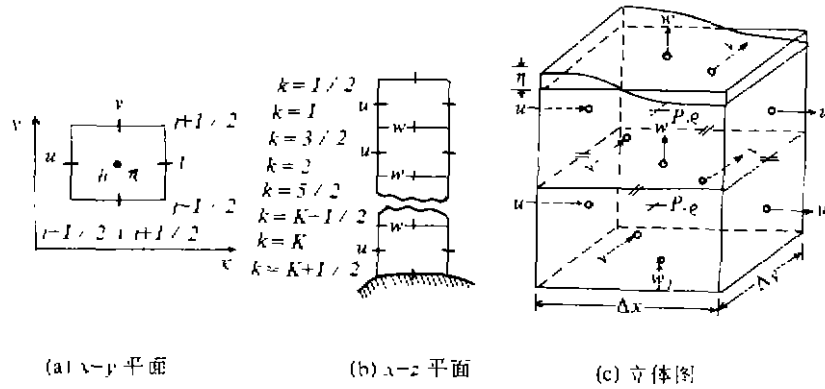


图 1 差分格式

Fig.1 Difference scheme

## 2 数值方法

如在水深方向,将水体划分成若干个水平层.对于每一层,各计算参数在差分网格上的位置如图 1 所示,于是式(3)和(4)在时间层上的离散形式为:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f v^{n+1/2} - g \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{n+1/2} + X^n + A_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^{n+1/2} \quad (6)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = -f u^{n+1/2} - g \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{n+1/2} + Y^n + A_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^{n+1/2} \quad (7)$$

其中

$$X = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + A_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$Y = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - A_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

式中,上标  $n$  表示时层,  $\Delta t$  是时间步长,  $n+1/2$  时层的函数值是  $n$  与  $n+1$  时层函数值的平均.式(6)与(7)经处理后为:

$$u^{n+1} = \alpha u^n + \beta v^n + \beta K_1 / f + \gamma K_2 / f \quad (8)$$

$$v^{n+1} = -\beta u^n + \alpha v^n - \gamma K_1 / f + \beta K_2 / f \quad (9)$$

式中  $\alpha = \frac{1 - (f\Delta t/2)^2}{a}$ ,  $\beta = \frac{f\Delta t}{a}$ ,  $\gamma = \frac{(f\Delta t)^2}{2a}$ ;  $a = 1 + \left( \frac{f\Delta t}{2} \right)^2$

$$K_1 = -g \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{n+1/2} + X^n + A_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^{n+1/2}$$

$$K_2 = -g \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{n+1/2} + Y^n + A_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^{n+1/2}$$

由于  $f \approx 1.45 \times 10^{-4} \sin \varphi$  ( $\varphi$  为纬度),故当  $\Delta t$  小于 1200s 时,  $f\Delta t/2 < 0.1$ ,这将导致  $\gamma/\beta < 1/10$ ,  $\beta/\alpha < 20/99$ .这说明  $\gamma$  同  $\alpha$  或者  $\beta$  相比,是一个一阶小量,因此可以将  $\gamma$  忽略不计.于是式(8)与(9)可简化为(注意当  $\gamma$  可以忽略时,  $\beta/f \approx \Delta t$ ):

$$u^{n+1} = -g\Delta t \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{n+1/2} + A_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^{n+1/2} \times \frac{\Delta t}{2} + X_1^n \quad (10)$$

$$v^{n+1} = -g\Delta t \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{n+1/2} + A_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^{n+1/2} \times \frac{\Delta t}{2} + Y_1^n \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad X_1^n &= \alpha u^n + \beta v^n + A_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^n \times \frac{\Delta t}{2} + X^n \Delta t \\ Y_1^n &= -\beta u^n + \alpha v^n + A_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^n \times \frac{\Delta t}{2} + Y^n \Delta t \end{aligned}$$

切应力项  $A_2 \frac{\partial u}{\partial z}$  与  $A_2 \frac{\partial v}{\partial z}$  在水表面分别由计算式  $C_w w_x (w_x^2 + w_y^2)^{1/2}$  与  $C_w w_y (w_x^2 + w_y^2)^{1/2}$  代替. 式中  $C_w$  为风阻力系数,  $w_x, w_y$  为 10m 高空处  $x, y$  方向上的风速分量. 在底面, 切应力项用近似公式  $A_2 \left( \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \gamma (u_b, v_b)$  计算, 式中  $\gamma$  是与底面糙率有关的摩擦系数,  $u_b, v_b$  分别为水底层  $x, y$  方向上的流速分量.

式(1)在时间层面上的离散形式为:

$$\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n dz + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{n+1} dz = 0 \quad (12)$$

将式(10)对  $x$ 、式(11)对  $y$  求导后, 代入式(12)得:

$$\begin{aligned} \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{2} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \left[ \frac{\partial(u + X_1)}{\partial x} \right]^n + \left[ \frac{\partial(v + Y_1)}{\partial y} \right]^n \right\} dz - \frac{\Delta t}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( A_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right)^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( A_2 \frac{\partial v}{\partial z} \right)^{n+1} \right] \Big|_{-h}^{\eta} + \frac{\Delta t}{2} g \int_{-h}^{\eta} \left[ \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)^{n+1/2} \right] dz \quad (13) \end{aligned}$$

在实际计算中, 式(10)、(11)与(13)的空间偏导数用中心差分近似. 当将  $n$  时刻各计算点的水位、流速看成是已知值, 并在开边界上给出水位值, 闭边界上给定法向流速为零时, 式(10)对于平面计算序号  $(i-1/2, j)$ , 式(11)对于  $(i, j-1/2)$  (图 1), 都可以从上至下、逐水层地写方程, 形成一个未知数为  $n+1$  时刻的水位与流速值的方程组. 式(13)对于表层的计算序号  $(i, j)$  展开后, 也可形成一个未知数为  $n+1$  时刻的水位与底层切应力 (表层切应力可据风速单独算得) 的方程组, 具体迭代计算步骤为:

(1) 利用底层流速分布的迭代值 (第一次迭代可取  $n$  时刻的值), 计算出  $n+1$  时刻的底层切应力的分布的迭代值, 然后求解式(13)对  $(i, j)$  展开后的方程组, 求得计算域内  $n+1$  时刻的水位分布的迭代值;

(2) 逐一对点  $(i-1/2, j)$ , 求解式(10)对各水层展开后得到的方程组, 得到  $n+1$  时刻各水层的  $x$  方向流速分布的迭代值;

(3) 逐一对点  $(i, j-1/2)$ , 求解式(11)对各水层展开后得到的方程组, 求得  $n+1$  时刻各水层  $y$  方向的流速分布迭代值;

(4) 将  $n+1$  时刻底层流速分布的新迭代值与次新的迭代值比较, 如误差在给定的精度范围内, 则可转入计算  $n+2$  时刻的水位、流速值; 否则, 底层的流速分布取最新一轮的迭代值, 然后重新进行步骤(1)~(3)的计算;

(5) 各水层面的垂向流速可据式  $w = -\int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{n+1} dz$  求得.

### 3 稳定性分析与模型检验

#### 3.1 稳定性分析

式(1)~(5)是非线性方程, 其差分计算的稳定条件尚无人求得. 但为实用需要, 通常将其

线性化后再求其稳定条件,以作参考.由于本文的模型采用逐层求解水平流速的方法,故为简单计,考虑二维线性浅水方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\eta_0 + h) \frac{\partial u}{\partial x} + (\eta_0 + h) \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

式中,  $\eta_0$  为平均水位值,其余符号与式(1)、(3)与(4)相同.

采用本文的差分格式得:

$$\begin{aligned}\frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\eta_0 + h) \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}(\eta_0 + h) \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{2\Delta y} \\ + \frac{1}{2}(\eta_0 + h) \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{2}(\eta_0 + h) \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{2\Delta y} = 0 \\ \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}g \frac{\eta_{i,j}^n - \eta_{i-2,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}g \frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i-2,j}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \\ \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}g \frac{\eta_{i,j}^n - \eta_{i,j-2}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2}g \frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j-2}^{n+1}}{2\Delta y} = 0\end{aligned}$$

计算误差值可表示为:  $e_{i,j}^n = \lambda^n e^{\rho(a\Delta x + \beta\Delta y)}$ , 式中  $\epsilon$  是计算点  $(i, j, n)$  的误差值,  $\lambda$  是增长因子,  $a, \beta$  分别  $x, y$  方向上的波数,  $\rho = \sqrt{-1}$ . 将误差值代入上面的差分方程, 整理得:

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)^3 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 \frac{g(\eta_0 + h)}{8} \left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2 (\cos 2\beta\Delta y - 1) \\ - (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 \frac{g(\eta_0 + h)}{8} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\cos 2\alpha\Delta x - 1) = 0\end{aligned}$$

于是可知第一个解为  $\lambda_1 = 1$ . 当  $\Delta x = \Delta y = \Delta S$  时, 上式变为:

$$\begin{aligned}\lambda^2(1 + C) - 2\lambda(1 - C) + 1 + C = 0 \\ (C = \frac{1}{4}g(\eta_0 + h) \left(\frac{\Delta t}{\Delta S}\right)^2 (2 - \cos^2\alpha\Delta x - \cos^2\beta\Delta y))\end{aligned}$$

其解为

$$\lambda_2 = \frac{1 - C + 2\rho\sqrt{C}}{1 + C}, \lambda_3 = \frac{1 - C - 2\rho\sqrt{C}}{1 + C}$$

于是得

$$|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = |\lambda_3| = \left[ \frac{(1 - C)^2 + (2\sqrt{C})^2}{(1 + C)^2} \right]^{1/2} = 1$$

综上所述, 本文采用的差分格式对二维线性浅水方程而言为无条件稳定, 故采用差分格式于式(1)一式(5)时, 时间步长可取较为宽松之值.

### 3.2 模型的验证

假定在一个断面为矩形, 长 9500m、宽 475m、深 100m 的渠道中出现二维立面的风生流现象, 水表面受一方向(与渠道纵向相同)大小恒定不变的风生切应力所作用, 其值为  $\gamma = 0.1\text{N}/\text{m}^2$ . 据文献[5], 在对渠底采用“无滑”条件的情形下, 可得稳态解析解为:

$$u = \gamma\sigma(h - \eta)(3\sigma - 2)/(4A_s\rho), \sigma = (h + z)/(h + \eta)$$

式中各符号意义同上.

采用本文的风生流数值模型计算该渠道的流态,采用的参数为: $\Delta x = \Delta y = 475\text{m}$ ,  $\Delta z = 10\text{m}$ ,  $\Delta t = 15\text{s}$ ,  $f = A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0.05\text{m}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 1026\text{kg}/\text{m}^3$ . 图 2 给出了渠道中部(水位值  $\eta = 0$ ) 断面解析公式与数值模型的计算结果比较,由图知,二者拟合较好.

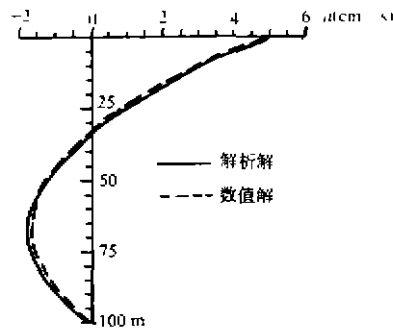


图 2 解析解与数值解的比较

Fig. 2 Comparison of analytical and numerical solutions

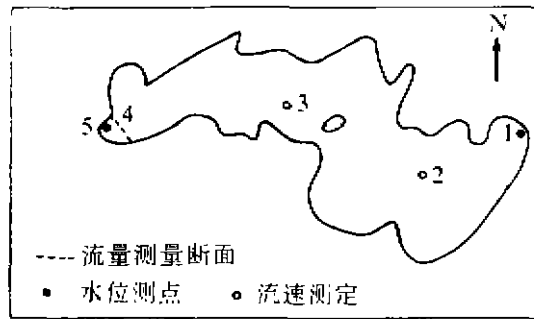


图 3 墨水湖水域与测点布置

Fig. 3 Map of Moshui Lake and location of sampling points

#### 4 实例计算

墨水湖位于武汉市汉阳区西南,是一个城市中的小型浅水湖泊,其汇水面积为  $21.90\text{km}^2$ , 湖盆呈浅碟型,湖长  $5.10\text{km}$ ,湖水面积  $3.35\text{km}^2$ ,平均水深  $1.35\text{m}$ (图 3). 长期以来,墨水湖是废、污水的接纳地,目前湖水已变黑发臭,严重影响城市卫生与市民生活. 为制订墨水湖的环境保护措施,需要模拟湖水的运动状况,以便为研究湖中污染物的混合提供基本的水力数据.

根据墨水湖水域地形图以及现场水位、流速监测资料,本文利用上述方程建立了墨水湖的三维风生流模型,对湖水的自然流动与风生流进行了模拟. 计算时  $x-y$  坐标平面位于湖平均水位的平面上,并向下将水体均分成三层,层厚为  $0.45\text{m}$ . 开边界上的水位由测点 1 与测点 5 处的水位观测值提供,空间步长  $\Delta x = \Delta y = 110\text{m}$ ,  $\Delta t = 90\text{s}$ ,  $A_1 = 0$ (即忽略平面粘滞项),  $A_2 = 0.07\text{m}^2/\text{s}$ (根据计算流速与实测流速的拟合情况,试算得到),  $\rho = 1000\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $\gamma = 2 \times 10^{-3}\text{m}/\text{s}$ .

表 1 是流速,流量实测值与模型计算值的比较,由表知,计算值与实测值吻合较好.

表 1 实测值与计算值的比较

Tab. 1 Comparisons between measured and computed velocity and flow capacity

测 点	2 <sup>#</sup> (流速, m/s)			3 <sup>#</sup> (流速, m/s)			4 <sup>#</sup> (流量, m <sup>3</sup> /s)
	表层	中层	底层	表层	中层	底层	
实测值	0.12	0.12	0.04	0.16	0.11	0.06	98.0
计算值	0.11	0.10	0.06	0.14	0.13	0.08	91.0

图 4 是无风情况下,墨水湖表、中、底水层自然流动情况的模拟结果. 图 3 中测点 1 与 5 附近分别是该湖的进出水口,因此水流的流向是由测点 1 沿湖长向测点 5 处流动,由图 4(a)~(c)知,自然流动趋势明显,但流速在大部分水域中均较小,表、中层的流速大小相近,底层较小,表、中、底层的水流流向基本相同.

图 4(d)~(f)是西北风(湖面  $10\text{m}$  高空处的风速为  $6.5\text{m}/\text{s}$ ,风向为北偏西  $67^\circ$ )持续较长

时间时,墨水湖风生流的流态趋于稳定时的模拟结果,计算时风阻力系数  $C_w = 2.56 \times 10^{-6}$ , 结果表明,受风力作用,表层流的流速较大,流向与自然流动时全然不同,它受风向与湖域地形的支配;而中底层的水流流速较小,流向则基本上与表层流相反,呈补偿现象.这与图2的解析解的情况相似,说明本文模型的计算结果的合理性.

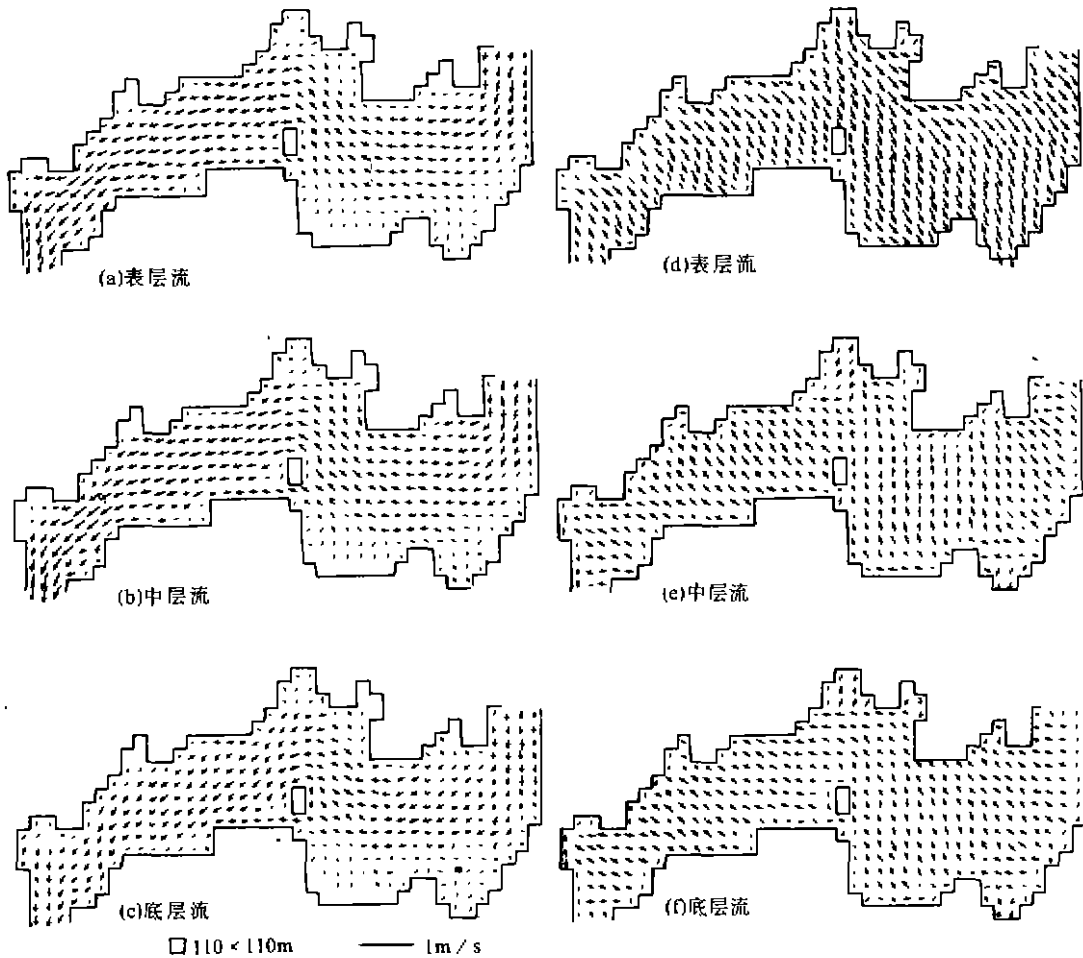


图4 各水层的平面流场 (a)~(c)自然流动;(d)~(f)风生流

Fig. 4 Horizontal current fields in different layers

(a)~(c): natural flow; (d)~(f): wind-driven current

## 5 结语

本文建立了三维水流运动的隐格式差分模型,该模型在计算水位时,需在整個计算区域的平面点上进行,方程组的阶数与平面水位点的个数相同;但在计算各水层的平面流速时,仅需在平面上逐点进行,方程组的阶数与水层数相同,从而可大大节约计算机内存,方便求解.另外,经对该模型的计算稳定性分析发现,计算时间步长具有较大的灵活性.

墨水湖风生流的实例计算表明,隐格式差分模型的计算结果合理可信,较好地反映了风生流时表底层流向相反的水流补偿现象.

## 参 考 文 献

- 1 赵士清. 长江口三维潮流的数值模拟. 水利水运科学研究, 1985, (1)
- 2 梁瑞驹, 仲金华. 太湖风生流的三维数值模拟. 湖泊科学, 1994, 6(4): 289—297
- 3 Packhaus J O. A three dimensional model for the simulation of shelf sea dynamics. *Dt Hydrogr.* 1985, **238**: 165—186
- 4 Koutitas C and O'Connor B. Modeling three-dimension wind-induced flows. *J Hydr Div.* 1980, **106**: 1843—1865
- 5 毛荣生, 黄 平. 墨水湖 N/P 水质模型研究. 湖泊科学, 1994, 6(4): 348—355

## A 3-DIMENSION IMPLICIT FINITE-DIFFERENCE MODEL FOR WIND-DRIVEN WATER CURRENT IN MOSHUI LAKE

Huang Ping<sup>1</sup> Mao Rongsheng<sup>2</sup>

<sup>1</sup>: *Department of Environmental Sciences, Zhongshan University, Guangzhou 510275;*

<sup>2</sup>: *Department of Rivers, Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, Wuhan 430072)*

### Abstract

Up to now, three-dimension (3-D) finite difference models have been extensively used to simulate water current in coastal areas, lakes and reservoirs. The explicit time integration method is used in many of such models and thus the time step size is limited by the well-known CFL stability criterion.

A three-dimension implicit finite difference model for wind-driven water current in a lake is developed in this paper. Stress terms, pressure terms and Coriolis terms in the governing equations are represented implicitly in the model, and through analysing the stability of difference scheme, it is discovered that time step size of the scheme is essentially independent of CFL criterion. The proposed model is thus valuable in reducing compute time.

The proposed model is first validated by a particular case where analytic solution is available in comparison with difference solution of the model, and then it is used to simulate wind-driven water current in Moshui Lake. The real case shows that the calculated results of the model are rational and available, and can describe better the structural characteristic of wind-driven water current in a lake.

**Key Words** Moshui Lake, wind-driven water current, implicit finite difference, three-dimension numerical simulation