

鄱阳湖二维水动力和水质耦合数值模拟^{*}

赖锡军, 姜加虎, 黄 群, 徐力刚

(中国科学院南京地理与湖泊研究所湖泊与环境国家重点实验室, 南京 210008)

摘 要: 针对大型通江湖泊水位变化剧烈, 地形起伏多变, 岸线复杂, 湖泊内部窄小洪道与大面洲滩和洼地连接复杂, 湖泊洲滩出露、淹没频繁交替等湖泊水情和地貌特征, 基于二维浅水方程和对流扩散方程组构建了鄱阳湖二维水动力和水质耦合模拟模型. 模型采用非结构网格有限体积法进行离散, 以 HLLC 算法计算单元界面的水量、动量和物质输运通量. 水陆边界通过水深自动判别, 为湖泊洲滩出露、淹没过程的模拟提供了合理有效的途径. 该模型适合于模拟鄱阳湖这类水陆界面动态变化极为显著的湖泊中的水流运动及其物质输运过程. 在 1998 年全年水情率定的基础上, 计算了 2008 年 1-10 月的水动力和水质(高锰酸盐指数和氨氮两个指标)时空分布. 并用实测水位、高锰酸盐指数和氨氮浓度过程数据以及遥测水域范围等, 从时间过程和空间分布上检验了鄱阳湖模型的可靠性. 鄱阳湖耦合模型克服了这类复杂水域水动力及其物质输运过程模拟的困难, 为相关应用提供了参考.

关键词: 水动力; 水质; 数学模型; 非结构网格; 鄱阳湖

Two-dimensional numerical simulation of hydrodynamic and pollutant transport for Lake Poyang

LAI Xijun, JIANG Jiahu, HUANG Qun & XU Ligang

(State Key Laboratory of Lake Science and Environment, Nanjing Institute of Geography and Limnology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008, P. R. China)

Abstract: The present study aims to develop a mathematical model for analyzing and predicting the hydrodynamic and water quality in one large lake (Lake Poyang) with great and rapid stage fluctuation, the complex topography and geometry, the complicated connectivity of narrow channels and depressions inside the lake, the frequently switch between exposed grass beach and water. Based on the two-dimensional shallow water equations and pollutant transport equations, the coupled two-dimensional hydrodynamic and pollutant transport model is developed. The unstructured finite volume method is applied to discretize the equations. The normal water mass, momentum and pollutant fluxes are computed by the HLLC solver. The water front moving boundary is identified automatically by the judgment of the latest water stage. It makes the model be capable of simulating the complex flow regime and the dynamic of pollutant transport in the lake with drying and wetting processes. The hydrodynamic model is calibrated by the water regime of the year 1998. Based on the calibrated hydraulic parameters, the hydrodynamic and water quality (COD_{Mn} and ammonia) from January to October in 2008 are simulated by the proposed model. The time series data of measured water stage, COD_{Mn} and ammonia, and remotely water extent of CBERS data are both used to validate the results of computation in time and space. The results indicate that the model has the capability to model the flows dynamic and the pollutant transport in this kind of lake.

Keywords: Hydrodynamics; water quality; mathematical model; unstructured grids; Lake Poyang

数学模型可经济、快速地获取时间和空间上完整的湖泊水系统的动力过程, 并用于湖泊水环境的分析与预测预报. 在实际大尺度湖泊水环境定量化分析中, 已成为了必备的研究手段^[1]. 湖泊水动力学模型起步较早, 在美国五大湖湖泊水动力和水质研究中, 由于五大湖为深水湖泊, 多基于海洋模型(如 Princeton ocean model)等来建立湖泊的三维水动力和物质输运模型^[2-3], 并用于分析湖泊环流、温度分层结构、泥沙悬浮沉

^{*} 中国科学院知识创新工程重大项目(KZCX1-YW-08-01)和国家自然科学基金项目(50709034)联合资助. 2011-01-07 收稿; 2011-05-05 收修改稿. 赖锡军, 男, 1977 年生, 博士, 副研究员; E-mail: xjlai@niglas.ac.cn.

降等. 我国湖泊以浅水湖泊居多, 由于受到富营养化问题的困扰, 对一些浅水湖泊开展了深入的水环境研究. 尤其是太湖, 为了揭示水环境的基本动力特征, 近 20 多年来, 针对研究需要, 建立了二维、三维风生流及营养盐输移模型等^[4-8].

不过, 太湖代表的是湖盆地形变化不大、且较为封闭的以风生流为主的大型浅水湖泊, 其年内水位变幅仅小幅震荡, 低水位时湖滩地出露不明显. 这与大型通江湖泊——鄱阳湖的水情和地貌特征大相径庭. 鄱阳湖是与长江自然相通的大型通江湖泊. 它接纳赣江、抚河、信江、饶河、修水五河来水, 经调蓄后由湖口北注长江, 形成完整的鄱阳湖水系(图 1), 流域面积为 $16.2 \times 10^4 \text{ km}^2$. 湖泊受长江和五河双重制约, 水情复杂多变, 呈季节性涨落, 具有“洪水一片、枯水一线”的独特自然地理景观(水位年内变幅达 $8.91 - 14.04 \text{ m}$), 在湖口水位 21.69 m 时, 面积为 2933 km^2 , 平均水深 5.1 m . 鄱阳湖属过水型湖泊, 换水速度快, 平均换水周期约为 21 d.

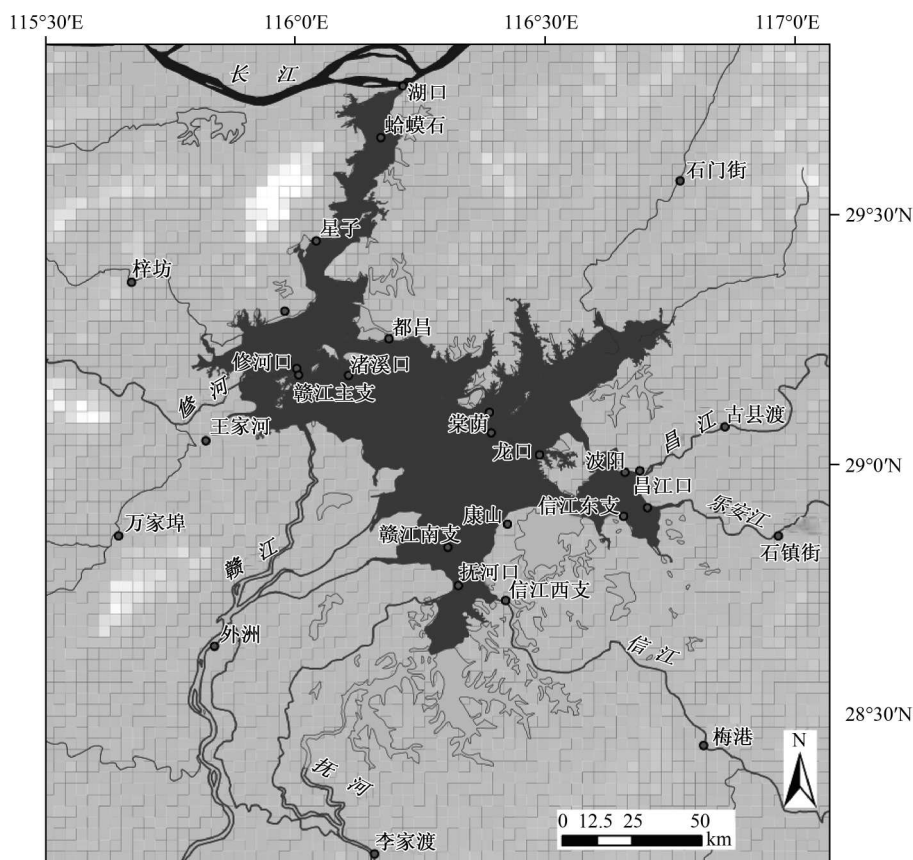


图 1 鄱阳湖湖区水系及水质站点分布

Fig. 1 The water system of Lake Poyang and main monitoring stations for water quality

鄱阳湖以重力型的吞吐流为主, 湖泊水流漫滩和露滩交替的过程也给水质模拟带来了难度, 常用的如 WASP 等箱式模型不适合直接应用, 目前还没有关于鄱阳湖水动力和物质输移模型报道, 也没有类似的湖泊研究可供参考. 近二十年来, 基于近似黎曼解的非结构网格有限体积法在水动力学的计算中得到了广泛关注, 发展了诸多适应不同流态计算的高性能算法^[9-11], 成功克服了实际水流条件准确计算的困难, 例如静水平衡计算、干河床上水流演进等. 由于水环境分析的需求, 这类模型得以进一步发展, 并应用到动水环境中污染物质的输运模拟^[12-15].

为了准确地分析和预测鄱阳湖这类湖泊水动力过程及其作用下的物质输运特征, 克服这类湖泊水动力

与水质模拟的难题,本文采用非结构网格有限体积法建立了能够耦合模拟鄱阳湖这类大型通江湖泊水动力和水质的数学模型.

1 基本原理

1.1 控制方程

二维浅水方程(深度平均)和物质运输的对流扩散方程组可以统一写成以下守恒形式,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = S \quad (1)$$

式中,

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \\ h\varphi \end{pmatrix}, F_x = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \\ hu\varphi \end{pmatrix}, F_y = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hv\varphi \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + \nabla^2 \frac{\varepsilon}{\rho} hu + c_w \frac{\rho_a}{\rho^2} \omega^2 \sin \alpha + fvh \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + \nabla^2 \frac{\varepsilon}{\rho} hv + c_w \frac{\rho_a}{\rho^2} \omega^2 \cos \alpha - fuh \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\varphi x} h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{\varphi y} h \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - K_{\varphi} h \varphi + S_{\varphi} \end{pmatrix}$$

式中, h 为水深; u 、 v 分别为 x 和 y 向水深平均的流速分量; φ 为环境因子和运输物质的垂线平均浓度,如 COD_{Mn} 、氨氮等各水质指标. F_x 为 x 向通量向量, F_y 为 y 向通量向量, S 为源项向量, $S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}$,为 x 向的水底底坡; $S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}$,为 y 向的水底底坡; $S_{fx} = \rho n^2 h^{-\frac{1}{3}} u / \sqrt{u^2 + v^2}$,为 x 向的摩阻底坡; $S_{fy} = \rho n^2 h^{-\frac{1}{3}} v / \sqrt{u^2 + v^2}$,为 y 向的摩阻底坡; c_w 为风的阻力系数; ρ_a 为空气的密度; ω 为风速; α 为风速与 y 轴的夹角. $D_{\varphi x}$ 、 $D_{\varphi y}$ 分别为 x 、 y 方向扩散系数; K_{φ} 为运输物质 φ 的综合降解系数; S_{φ} 为源汇项.

1.2 数值方法

1.2.1 方程离散 二维方程组应用非结构网格有限体积法求解.先对方程在任意控制体积 V (其边界为 A)作体积积分,利用高斯定理将体积分化成面积分,有:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV = - \int_A F(U) \cdot n dA + \int_V S dV \quad (2)$$

式中, n 为单元边界 A 的外法向单位向量, $F(\varphi) \cdot n$ 为法向数值通量.

对控制体单元取平均后,采用一阶显格式离散时间导数项后,即可得到有限体积法的空时间离散化的方程组:

$$U^{m+1} = U^m - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{j=1}^m T(\theta)^{-1} F_j(\bar{U}) A_j + \Delta t \bar{S} \quad (3)$$

式中, ΔV 为单元体积, m 为单元面总数, A_j 为单元面 j 的面积, \bar{S} 为单元的源项平均值,单元面 j 的法向对流通量为 $F_{n,j} = F_j(U) \cdot n$.

1.2.2 法向通量求解 方程(3)的求解关键在于确定法向数值通量.利用方程的旋转不变性,把二维问题法向通量计算转化为求解一维局部坐标系下的黎曼问题,即可确定数值通量.首先建立局部 $x' - y'$ 坐标系

中沿 x' 轴(即边界的外法向)的一个一维黎曼问题. 其目的在于求解如下的黎曼问题以得到界面处的数值通量:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(\bar{U})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (4)$$

式中,

$$\bar{U}(\bar{x}, 0) = \begin{cases} \bar{U}_L, & \bar{x} < 0 \\ \bar{U}_R, & \bar{x} > 0 \end{cases} \quad (5)$$

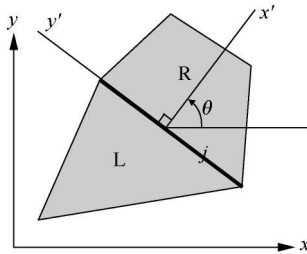


图2 有限体积单元示意

Fig. 2 Cell of finite volume method

式中, x' 为单元交界面上法向量 n 的坐标(图2), 此坐标系中以交界面中央点为原点. \bar{U} 是 q 在法向的投影, \bar{U}_L 及 \bar{U}_R 分别为单元交界面左(内)右(外)两侧的因变量. 假设初始值 $\bar{U}(t=0)$ 已知, 那么求解该黎曼问题, 可以得到 $t=0^+$ 时刻 $x'=0$ (界面) 处的 $F_{LR} = F(\bar{U}_L, \bar{U}_R)$. 通过旋转逆变换可以给出原始坐标系 $x-y$ 下的法向数值通量.

本文中采用了 HLLC 算法^[9] 计算通量 F_{LR} , 其法向通量可以表达成:

$$F_{LR}^{HLLC} = \begin{cases} F_L, & 0 \leq S_L \\ F_L + S_L(U_{*L} - U_L), & S_L \leq 0 \leq S_* \\ F_R + S_R(U_{*R} - U_R), & S_* \leq 0 \leq S_R \\ F_R, & S_R \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中, S_L 、 S_* 和 S_R 为三个波速, 可用 Roe 平均的特征值计算^[16]. 有星标的左状态 $U_{*L} = h_L \frac{S_L - U_L}{S_L - S_*} [1, S_*, v_L, \varphi_L]^T$; 将相应的左状态替换成右状态, 即可计算出有星标的右状态 U_{*R} .

1.2.3 边界条件 对于边界单元, 计算域内的左状态 U_L 是已知的, 而右状态 U_R 是未知的. 一般可根据局部流态适当选定的输出特征的相容关系和指定边界条件确定未知状态^[11], 常见的有流量、水位和水位流量关系三种. 对于物质输移问题, 入口处可给定边界上的浓度过程或污染负荷过程; 面域上, 可给定污染负荷带源项计算; 水流出开口边界可给定自由输出的 Neumann 边界条件或浓度过程.

1.2.4 动边界处理 洲滩淹、露频繁交替是鄱阳湖这类大型通江湖泊的重要水文特征. 动态处理这类运动边界是这类湖泊水动力、水质模拟的关键点之一. 根据有限体积法特点, 采用了干湿判别法计算动边界, 即: 以水深为判别标准动态设定单元界面的类型, 并运用相应的方法计算跨界面的法向通量, 以保证水量平衡.

根据界面左右两侧的单元状态(以下标 L 表示左状态, R 表示右状态), 在每一步计算时动态判别界面类型, 选择相应的方法计算跨界面通量. 界面两侧各种可能的状态共有 8 种, 分别列于图 3. 图 3a-图 3d 为界面左侧单元底高于右侧单元底高的情形, 分别对应四种情况, 即: 当左状态为有水单元($h_L > \varepsilon$)时: (a) 若右状态水位低于左侧单元底高程($h_R < Z_{bl} + \varepsilon$), 则采用堰流公式或瞬时溃坝解析解计算通量; (b) 若右状态水位高于左侧单元底高程($h_R > Z_{bl} + \varepsilon$), 则采用正常的方法估算通量. 当左状态为无水单元($h_L < \varepsilon$)时: (c) 若右状态水位低于左侧单元底高程($h_R < Z_{bl} + \varepsilon$), 则按壁面边界处理; (d) 若右状态水位高于左侧单元底高程($h_R > Z_{bl} + \varepsilon$), 则按堰流公式或瞬时溃坝解析解计算通量. 图 3e-图 3h 为界面左侧单元底低于右侧单元底高的情形, 也分别对应四种情况, 这里不再详述.

2 鄱阳湖模型构建

2.1 研究区域及计算网格

正如引言中所述及的, 鄱阳湖水位变化剧烈. 枯水期湖泊湖水归槽, 滩地出露, 湖水只局限于洪道主槽和内湖洼地, 而且中部的大湖面也明显退缩, 呈“河相”特征. 丰水期, 水位上涨, 内湖洼地和洪道、大湖面连

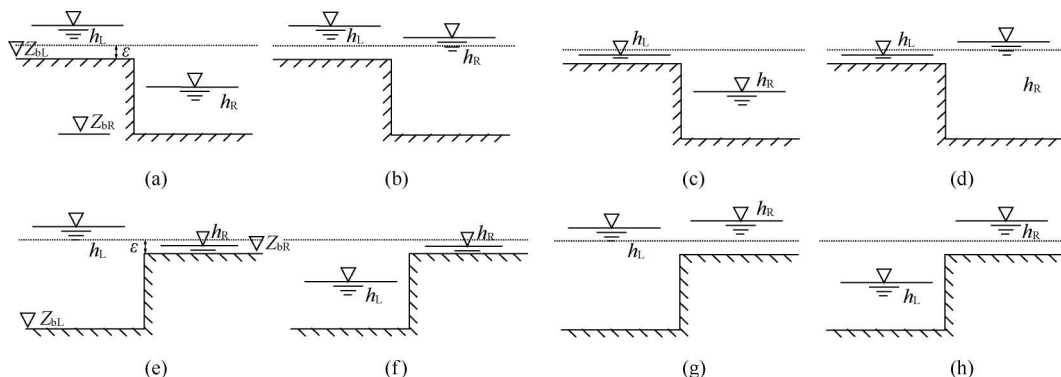


图3 计算单元界面两侧可能的水深状态

Fig.3 Possible water depth across cell interface

成一体,呈“湖相”.为了精确地模拟这种湖泊的水流特征和动态调蓄能力,模型的计算网格必须能准确分辨湖泊的地形特征.本文采用了四边形为主辅以三角形的网格单元离散计算区域(图4),计算网格由9877个节点和9656个单元组成.为了细致地刻画洪道和滩地地形特征,采用了尺度大小不一的计算单元,洪道主槽单元较为精细,而在地形变化不大的滩地则采用了较大尺度的单元.在选用的计算网格中各单元的边长从30 m到2000 m不等.这样的网格可以保证枯水期湖流计算的可靠性.模型计算单元的地形数据插值自1:25000地形图.

2.2 初始条件和边界条件

初始条件难以用实测资料给定,尤其是流速.为此,计算中常根据计算初始时刻的入口流量和湖泊出口水位计算出恒定的水流条件作为初始条件.水质的初始浓度设为某一常数.

鄱阳湖共有九个主要的入流口,分别是赣江主支、赣江北支、赣江中支、赣江南支、信江、抚河西支、乐安江、昌江和修河,模型的入流边界流量给定过程,其数值根据五河的尾间的主要控制站外洲、梅港、李家渡、虎山、渡峰坑和万家埠的流量过程和各河道从控制入湖的平均传播时间给定.其中赣江各支河道流量根据占外洲流量的份额按经验分配.鄱阳湖的出口仅有湖口一个,在鄱阳湖水动力和水质的计算中,给定湖口的水位过程作为下游边界条件.在九个入湖湖口区,同时要给定入流污染物质的浓度或者入湖污染负荷.在出湖口,水质边界设为自由输出的Neumann开边界.

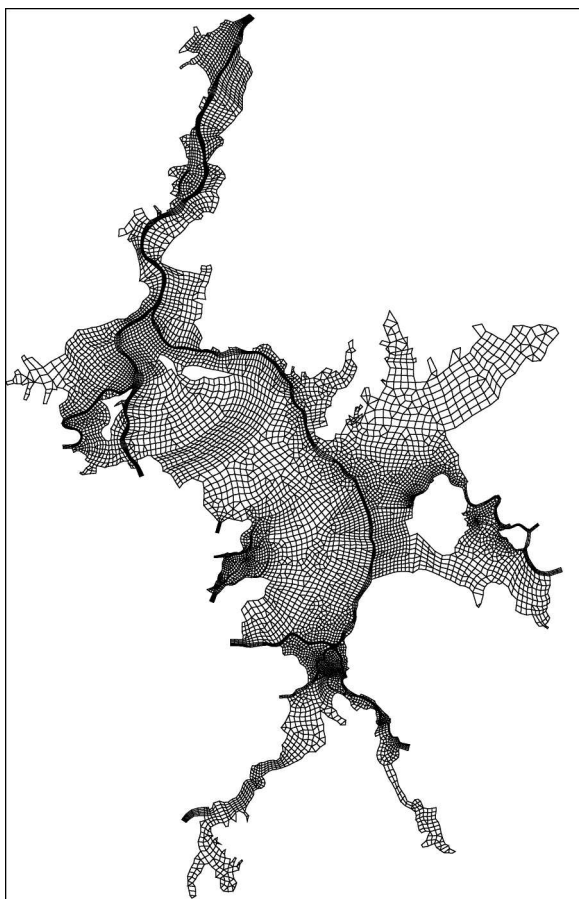


图4 计算网格

Fig.4 Computational grids

2.3 水动力学模型参数率定

选取鄱阳湖 1998 全年水情资料,开展了鄱阳湖水动力学模型参数的率定计算. 率定的模型参数主要是糙率. 鄱阳湖水水位变幅剧烈,为此,在计算中选用了随水深变化的糙率 n 表达式,即: $n = n_0 h^\alpha$, 式中 n_0 为水深 1 m 的基础糙率值, h 为水深, α 为系数. 经 1998 年水情资料率定,取 $n_0 = 0.022$, $\alpha = -1/6$. 湖区水位验证如图 5 所示,星子、都昌、康山和波阳四个站点的 Nash 效率系数分别为 0.94、0.97、0.91 和 1.00.

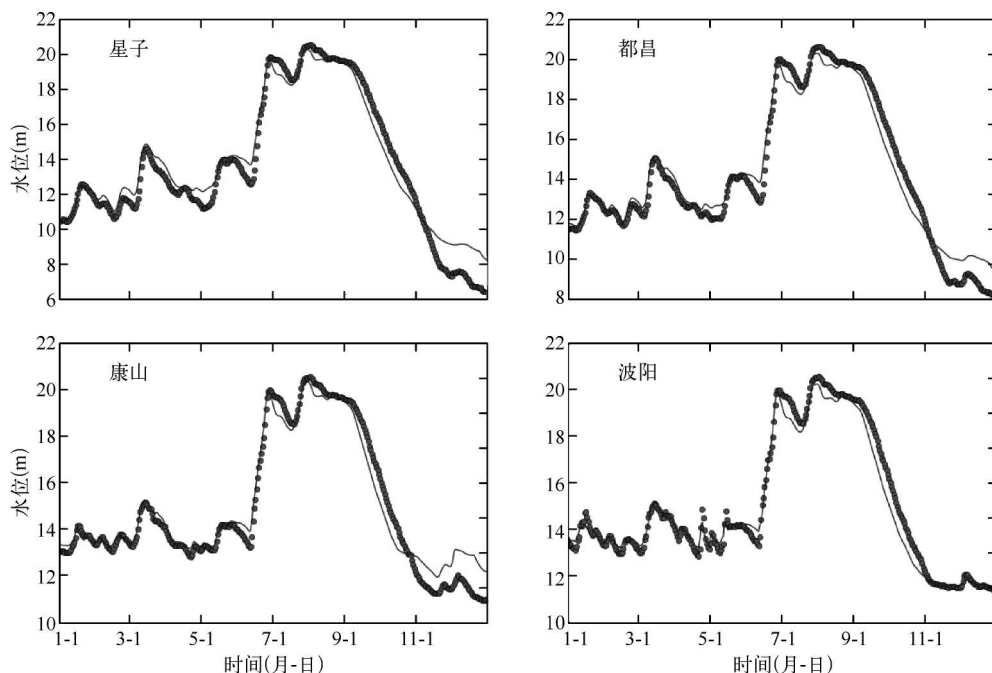


图 5 鄱阳湖水动力学模型率定(1998 年)(实线为实测值,圆点为计算值)

Fig. 5 The calibration of hydrodynamic model of Lake Poyang (1998)

3 模型检验

3.1 鄱阳湖水动力与水质耦合计算

采用 2008 年 1-10 月的水文与水质资料,模拟了鄱阳湖 2008 年 1-10 月的水动力和水质动态过程. 水动力计算所需的初始条件、各入流河道的入流过程、湖口边界和糙率参数根据上文所述给定. 动边界处理的水深限值 ε 取 0.001 m. 因鄱阳湖的湖流主要是以重力流型为主,湖泊换水速度快,所以本文没有考虑风场对湖泊水质计算的影响.

计算了两个水质指标:高锰酸盐指数(COD_{Mn})和氨氮. 污染物质衰减系数与所处的自然环境条件相关,由于缺少野外及室内试验资料,只能在参考相关的研究成果基础上给定. 模型计算中,衰减系数取为一固定常数值,通过多次试算, COD_{Mn} 和氨氮分别选取 0.02 和 0.01 d^{-1} . 两个指标计算所需的底水水质条件根据已有的站点资料,在全湖都取为一个固定的常数. 因为在入湖河口处没有同步的实测资料,两个指标的边界条件通过附近站点的插值来给定. 对于湖泊内部和区间其它方式流入产生的污染物质来源都因资料缺乏而未加考虑.

3.2 湖泊水位过程及其空间分布

首先对各主要控制站的水位过程进行验证. 模拟的水位变化过程和实际水位过程涨落变化一致. 但是在水位较低的时段,尤其是星子和都昌两站,计算水位存在明显的偏离(图 6). 根据作者对历史水位过程和不同计算结果的分析比较,主要原因在于本模型采用较老的地形资料导致了较大的计算误差,作者将另文

阐述.

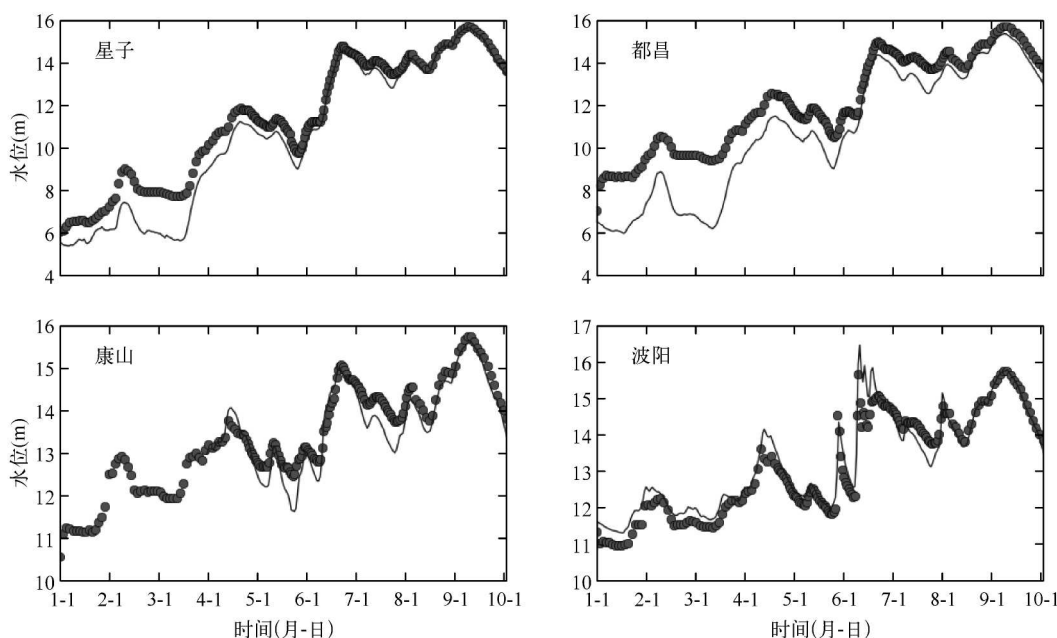


图6 水位(黄海高程)过程验证(实线为实测值,圆点为计算值)

Fig. 6 The stage comparison between computation (circle) and measurements (line) in main stations of Lake Poyang

为了验证湖泊水动力计算在空间分布上的可靠性,获取了两景 CBERS 卫星的 CCD 影像数据(幅宽 113 km,空间分辨率为 20 m),提取了遥感水域面积,并与计算水域面积进行了对比.模型能够反映鄱阳湖湖泊洪枯水位的变化,在较低水位时,大湖面与内湖洼地处于相互隔离的状态,随着湖泊水位的上升,当都昌水位为 16.01 m 时,除在南矶山附近和吴城周边小块区域出露之外,鄱阳湖湖面基本形成一体的湖面(图 7).尽管由于计算网格尺寸要远大于 CBERS 影像,使得计算水域面积的粒度要大,但是水域面积分布与遥感观测基本一致.

3.3 湖泊水质过程及其分布

12 个水质监测站点的 COD_{Mn} 和氨氮浓度过程如图 8 所示.模拟的两个水质指标的浓度和实测值吻合,总体来看, COD_{Mn} 的计算结果与实测值更为接近,而氨氮指标的计算值偏差较大.从空间分布来看,在各个入湖河口附近的监测站点处无论是 COD_{Mn} 还是氨氮指标,其计算值与实测值非常吻合,这与边界数据由监测数据插值的结果来设定有关系.对于距离入湖河口较远的湖心区如都昌、诸溪口和龙口等站点处,其 COD_{Mn} 的计算结果和实测值非常接近,但是这些位置的氨氮浓度偏差较大.对湖口水道的星子、蛤蟆石和湖口等站点的的结果,也同样是 COD_{Mn} 的计算结果好,而氨氮的结果偏差较大.湖心区的都昌站、入江水道的星子、蛤蟆石和湖口三站的计算浓度在 4 月底到 6 月中均有一个明显峰值,而实测浓度并没有这样的波动.经过事后的分析,作者认为原因可能来自于边界数据的设定,在计算中,赣江南支和赣江中支的边界条件和赣江南支的实测浓度过程非常接近,即在 4-6 月间有个明显的浓度峰值,其中最大值高达 5 mg/L.考虑到该监测数据是瞬时值,带入边界进行插值后,造成了在该时间段内计算入湖负荷都比实际情况要明显偏高.此外,诸溪口站点的数据在起始时段内出现浓度为零的情形,这是由于在该时间段内该站点计算单元处于枯水状态.并在 6 月份左右出现了一个剧烈的波动,这可能是因外围高浓度水覆盖若干单元区域引

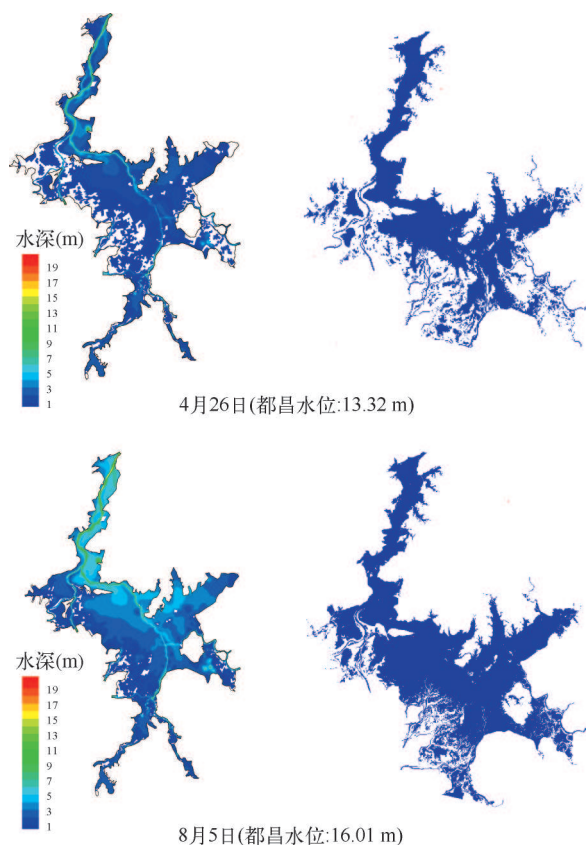


图7 不同时期水域空间分布验证(左图为计算的水位等深图,右图为水域分布)
Fig. 7 Comparison of the computed (left) and remotely observed water extent (right)
at different time instants

起的.

由于各个入湖河口污染负荷的差异,引起了鄱阳湖水质分布明显的空间异质性;同时,鄱阳湖水情波动再加上入湖污染的动态变化,使得空间格局随之发生动态变化. 湖泊浓度分布直接受五河各河道入流水情和入湖负荷的影响,不同时期 COD_{Mn} 浓度的空间格局存在明显的差异(图9).

4 结论

本文基于二维浅水方程组和二维对流扩散方程组建立了鄱阳湖二维水动力和水质耦合模拟的数学模型. 模型充分考虑了鄱阳湖湖泊水位变化剧烈,地形起伏多变,岸线复杂,湖泊内部窄小洪道与大面洲滩和洼地连接复杂,湖泊洲滩出露、淹没频繁交替等湖泊水情和地貌特征,实现了这类大型通江湖泊水动力和物质运输模型的构建. 模型采用了基于黎曼近似解的 HLLC 算法,可模拟不同的水流流态及其物质运输过程. 以 2008 年 1-10 月的水动力和水质计算为例,对模型进行了检验. 根据现场观测的水位、水质指标过程以及遥测水域范围数据和模型计算的比较,表明模型可胜任于复杂水域和水情条件下水动力和水质的二维分析与预测. 模型率定的 1998 年水情计算与实测符合很好,不过,由于地形的数据没有得到更新,在 2008 年的预测中,星子和都昌站低水位时,计算水位明显偏高. 为此,在模拟近些年的水情与物质运输时,需要获取新的地形数据.

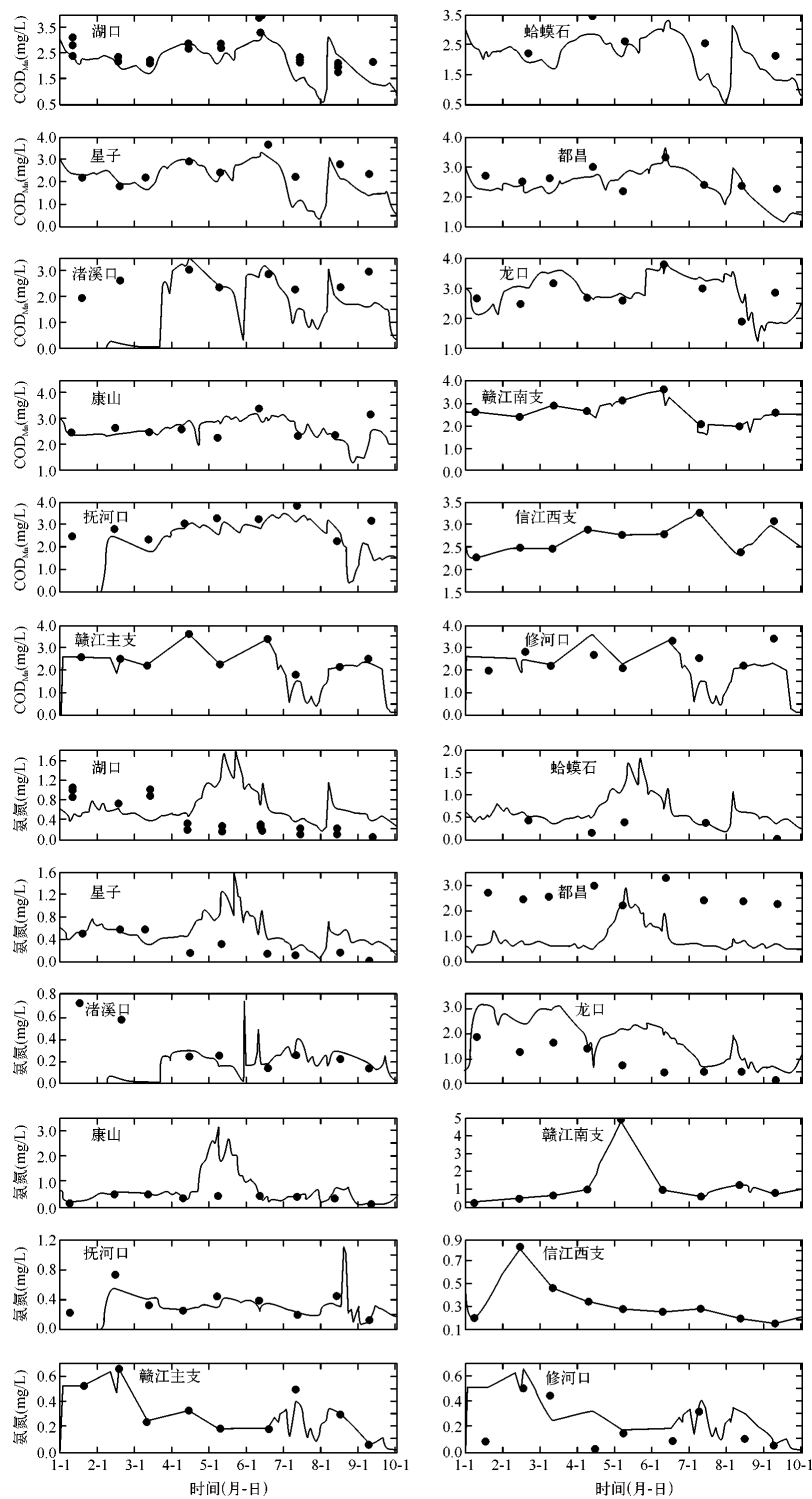
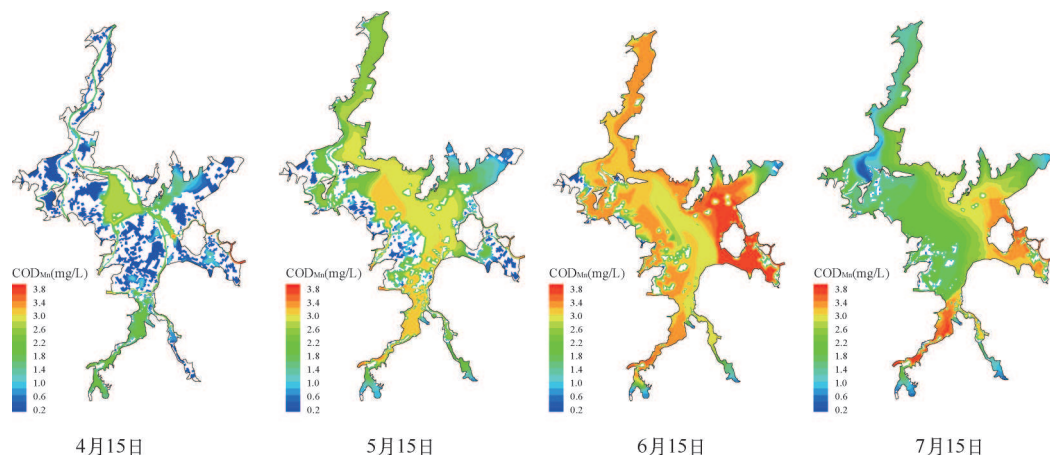


图8 鄱阳湖主要监测站点 COD_{Mn} 和氨氮计算结果与实测的比较(实线为计算值,圆点为实测值)

Fig. 8 Comparison of computed and measured COD_{Mn} and ammonia concentrations in the main stations of Lake Poyang

图9 不同时期鄱阳湖水水质(COD_{Mn})空间分布动态Fig.9 Spatial distribution of COD_{Mn} in Lake Poyang at different time instants

5 参考文献

- [1] Jorgensen SE, Löffler H, Rast W. Lake and reservoir management. Elsevier Science Ltd., 2005.
- [2] Huang A, Rao YR, Lu Y. Evaluation of a 3-D hydrodynamic model and atmospheric forecast forcing using observations in Lake Ontario. *Journal of Geophysical Research*, 2010, **115**:13.
- [3] Beletsky D, Schwab D, McCormick M. Modeling the 1998–2003 summer circulation and thermal structure in Lake Michigan. *Journal of Geophysical Research*, 2006, **111**: 18.
- [4] 梁瑞驹, 仲金华. 太湖风生流的三维数值模拟. 湖泊科学, 1994, **6**(4): 289-297.
- [5] 逢 勇, 濮培民. 太湖风生流三维数值模拟试验. 地理学报, 1996, **51**(4): 322-327.
- [6] 黄 群, 姜加虎. 应用嵌套模式研究梅梁湖区风生流. 水科学进展, 1998, **9**(1): 32-37.
- [7] 朱永春, 蔡启铭. 太湖梅梁湾三维水动力学研究 II: 营养盐随三维湖流的扩散规律. 海洋与湖沼, 1998, **29**(2): 169-174.
- [8] Hu W, Jørgensen SE, Zhang F. A vertical-compressed three-dimensional ecological model in Lake Taihu, China. *Ecological Modelling*, 2006, **190**(3-4): 367-398.
- [9] Toro EF. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. John Wiley and Sons, 2003.
- [10] 谭维炎. 计算浅水动力学——有限体积法的应用. 北京:清华大学出版社, 1998.
- [11] Zhao DH, Shen HW, Tabios III GQ *et al.* Finite volume two-dimensional unsteady flow model for river basins. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1994, **120**(7): 863-883.
- [12] 丁 玲, 逢 勇, 赵棣华等. 通量差分裂格式的二维水流水质计算的适用性分析. 水科学进展, 2004, **15**(5): 561-565.
- [13] 赵棣华, 姚 琪, 蒋 艳等. 通量向量分裂格式的二维水流-水质模拟. 水科学进展, 2002, **13**(6): 701-706.
- [14] 赵棣华, 徐葆华. 平面二维水流-水质有限体积法及黎曼近似解模型. 水科学进展, 2000, **11**(4): 368-374.
- [15] 赵棣华, 李 晔, 陆家驹. 长江江苏段二维水流-水质模拟. 水利学报, 2003, (6): 72-77.
- [16] Einfeldt B. On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1988, **25**(2): 294-318.