

杭州西湖总磷动态变化预测^{*}

裴洪平 何金土 王维维

(杭州大学生命技术学院, 杭州 310028)

摘要 建立了西湖污染物分布和浓度变化的水质对流扩散模型, 并利用该模型对西湖水体引水后 7d 内总磷浓度的变化进行了预测, 然后对预测结果作了较为详细的分析。

关键词 对流扩散模型 总磷 杭州西湖 数值模拟

杭州西湖是一个小型浅水湖泊, 由于氮、磷等营养物质的不断输入, 湖中藻类大量繁殖, 影响了水色和透明度, 为了揭示营养物质在西湖水体中的深度变化, 本文试图用对流扩散模型来预测西湖水体在各位点上的变化, 以期改善水质提供科学依据。

1 对流扩散模型

1.1 质量平衡方程

西湖作为小型浅水湖泊, 其湖流可看作二维无粘性不可压缩流, 又由于西湖特殊的地理位置, 预测水质选择参数时可排除对流作用。一般污染物(如总磷等)分布和浓度变化服从下述模型:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial C}{\partial y}) = D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}) + S \quad (1)$$

边界条件 $C|_{\Gamma_1}(t, x_i, y_i) = C_i \quad (2)$

$$\frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (3)$$

初始条件 $C(0, x, y) = C_0 \quad (4)$

(1)式中, u, v 为湖流速度, 由于总体上湖流速度缓慢, 难以实测, 可由流场模型给出; D 为扩散系数, 各向同性; S 表示水中生物、化学、物理诸作用对总磷变化的贡献, 它基本上是底泥-水界面上污染物净交换量; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是各段湖岸、岛屿的固定边界; (2)式中 C_i 为湖水各出入口 (x_i, y_i) 处污染物浓度, 预测时段内视 C_i 不变。(3)式说明污染物浓度在湖岸法线方向梯度为零。(4)式在预测时根据实际情况设定。

1.2 方程的求解

采用伽辽金(Galerkin)加权余量法来求解上述偏微分方程。首先分离变量, 设

$$C(t, x, y) = C_j(t) \cdot \Phi_j(x, y)$$

* 国家自然科学基金(3917069)和浙江省自然科学基金(390166)联合资助项目。

收稿日期: 1994-12-26; 接受日期: 1995-12-08。

作者简介: 裴洪平, 男, 1946年生, 副教授。1970年毕业于杭州大学数学系。主要从事生态数学模型研究, 著有《生物统计学》, 并发表有关论文多篇。

$$\frac{dC_i}{dt}\varphi_i + C_i\left(u_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right) - DC_i\left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}\right) - S = 0$$

于是二维伽辽金方程为:

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \left[C_i(t)\varphi_i + C_i\left(u_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right) - DC_i\left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}\right) - S \right] dx dy = 0$$

对于上述第三项作分部积分,并利用格林公式,整理后可得:

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) C_i dx dy = -C_i \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) dx dy$$

于是伽辽金方程变为:

$$\begin{aligned} \frac{dC_i(t)}{dt} \iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_i dx dy + C_i(t) \iint_{\Omega} \left[D \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) + \varphi_i \left(u_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ = \iint_{\Omega} S \varphi_i dx dy \end{aligned}$$

于是就得到关于 $C_i(t)$ 的常微分方程组:

$$A_i C_i(t) + B_i C_i(t) = T_i \quad (5)$$

其中

$$A_i = \iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_i dx dy \quad (6)$$

$$B_i = \iint_{\Omega} \left[D \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) + \varphi_i \left(u_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (7)$$

$$T_i = \iint_{\Omega} (\varphi_i K/z) dx dy \quad (8)$$

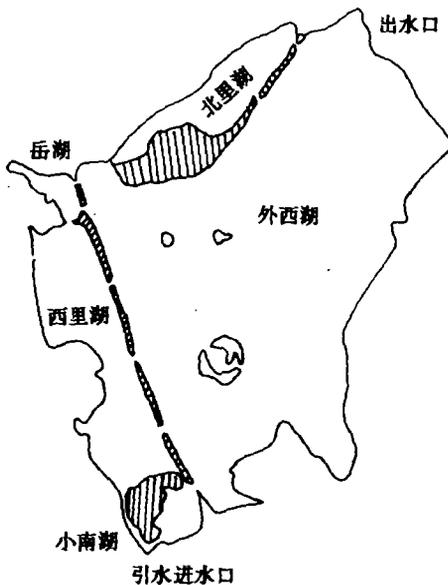


图1 西湖湖区分布
Fig.1 Distribution of the districts of West Lake

式中, K 为污染物质沉积(释放)净速度, z 为节点 (x, y) 处水深, 其商基本上是底泥-水界面上污染物净交换量 S ; u_i, v_i 为节点 (x, y) 处 x, y 方向水流速度。

2 程序方法

利用上述对流扩散模型对西湖水质的总磷(TP)浓度作了预测试验。

西湖南北长 3.3km, 东西宽 2.8km, 湖周长 15km, 总面积 6.03km²。湖中有三岛, 湖内白堤和苏堤把西湖分成 5 个湖区(图 1), 边界较为复杂。为此作一个三角形网格覆盖整个水面, 把一些特殊点, 如污染源点包含在网格点中。本程序网格共有 128 个结点, 182 个三角形元。

由于积分区域是一些任意三角形的集合, (6)~(8)式直接积分极为繁复, 不适合计算机编程, 因此首先需要作积分变换。

当取三角形元(面积记为 A)线性插值基函数为 $\varphi_i = a_i x + b_i y + d_i$ 时,有:

$$a_i = \frac{y_i - y_k}{2A}, \quad b_i = \frac{x_i - x_j}{2A}, \quad d_i = \frac{x_i y_k - y_j x_k}{2A}$$

故面积坐标

$$\xi_i = \frac{A_i}{A} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = a_i x + b_i y + d_i = \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

显然三个面积坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 有关系

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

于是 (x, y) 平面上的二重积分可化作 (ξ_1, ξ_2) 平面上 (ξ_1, ξ_2) 相互独立, 而 $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ 的二重积分。此时从关系式

$$x = (x_1 - x_3)\xi_1 + (x_2 - x_3)\xi_2 + x_3$$

及

$$y = (y_1 - y_3)\xi_1 + (y_2 - y_3)\xi_2 + y_3$$

易得积分变换的雅可比(Jacobi)式为 $2A$ 。对形如(6)式的积分不难求得:

$$\iint_{(\Delta)} \varphi_1 \varphi_2 dx dy = \iint_{(\Delta')} \xi_1 \xi_2 \cdot 2A d\xi_1 d\xi_2 = \frac{A}{12}$$

故

$$\iint_{(\Delta)} \varphi_i \varphi_j dx dy = \begin{cases} A/3 & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ A/12 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases}$$

利用分部积分法与欧拉(Euler)积分公式,对形如(7)式的第二种积分不难推知:

$$\begin{aligned} \iint_{(\Delta)} \left[D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \varphi \left(u_j \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_j \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ = D(a_j a_j + b_j b_j) A + (u_j a_j + v_j b_j) \frac{A}{3} \end{aligned}$$

对形如(8)式的第三种积分有:

$$\iint_{(\Delta)} \varphi \frac{K}{z_j} dx dy = \frac{K}{z_j} \cdot \frac{A}{3}$$

在上述基础上易编程形成总体模型矩阵。程序主流程分成六步:① 输入所有结点号、坐标、水深、流速、初始条件、边界条件诸数据;② 据(6)、(7)、(8)式形成模型总体矩阵 A, B, T , 并作边界条件处理;③ 使用全选主元高斯-约当消去法求 A 的逆阵;④ 形成标准常微分方程组;⑤ 用四阶龙格库塔(Kunge-Kutta)法解上述方程组;⑥ 输出各时刻各点位总磷浓度值,并调用绘图子程序,输出五大湖区总磷平均浓度值及相应曲线图。

3 预测结果分析

用 FORTRAN77 语言编制预测程序,在 486 微机上运算。下面是计算机给出的预测 7d 平均总磷变化的部分结果(图 2),然后用实测数据来验证上述模拟数值(表 1),结果表明实测值与模拟值是吻合的。预测结果分析如下:

(1) 有大约 50 个点位总磷浓度缓慢下降。这些点大部分位于主湖区即外湖区域,因此在正常引水条件下($30 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$),西湖水质有所改善。

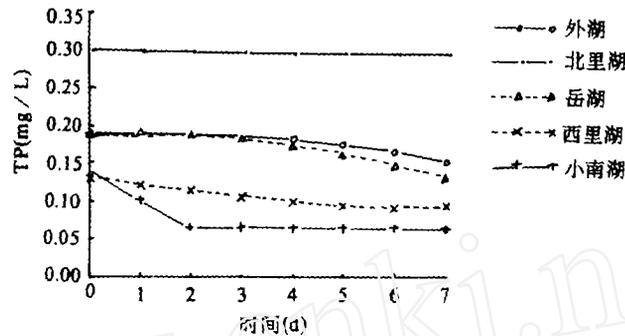


图 2 引水 7d 后西湖各湖区平均总磷浓度的变化

Fig. 2 Averaged TP concentration in each lake districts within 7 days under normal water-drawing

由表 1 可见,外西湖平均总磷浓度由 0.190mg/L 降至 0.151mg/L,由此及水质监测数据可得出用近似函数 $C \approx -0.0083t^{4/5} + 0.19$ 来拟合外湖总磷浓度变化。据监测,由于钱塘江水平均总磷浓度为 0.062mg/L,故西湖总磷平均浓度降至 0.100mg/L 后几乎不再下降,从 $0.100 \approx -0.0083t^{4/5} + 0.190$ 可得出 $t \approx 19.7 \approx 20d$ 。总磷下降速度 $\partial C / \partial t = -0.0066t^{-1/5}$ 随时间增大而减小,因此每次引水时间太长并无多大效益。一般以 20d 左右为宜,可使引水工程发挥最佳效益。

表 1 引水前后总磷浓度实测值与模拟值比较

单位:mg/L

Tab. 1 Comparison between observed and simulated values of TP concentration before /after water-drawing

湖 区	引水前夕	引水 7d 后	
		实测值	模拟值
外西湖	0.190	0.160	0.158
岳 湖	0.190	0.125	0.132
西里湖	0.130	0.110	0.094
小南湖	0.140	0.090	0.063
北里湖	0.290	0.280	0.295

(2) 大约有 20 个点位总磷浓度下降很快。特别是小南湖中心,小南湖至西里湖入口,西里湖最南端至外湖入口,西里湖北端至岳湖入口等处总磷浓度下降很快,计算出现负值,这是因为这些点位大多离钱江水引入口近,通道狭窄,流速可达 dm/s 量级,而湖面多数点位流速仅为 mm/s 或 cm/s 量级,故这些点输移作用 $-(u \cdot \partial C / \partial x + v \cdot \partial C / \partial y)$ 相对最强,致使计算中总磷迅速下降而出现负值。美国 T. J. Chung 曾指出^[4]：“偶尔出现负浓度是低弥散问题具有的特性”，“负解选择给用户提出了一个通过程序的旁路,即允许负浓度存在”,因而可用适当数值代替负值解。

(3) 有 14 个点位总磷浓度不变。如位于外湖东南角长桥湾至清波门南端湖区,几乎整个北里湖、岳湖西南部等湖区,总磷浓度无变化。它们是引水流场的死角,这些点位只能靠截污等其它方法来改善水质。

(4) 约有 14 个点位总磷浓度上升。例如外湖南端附近,小南湖西北侧近旁等处总磷上

升较快,这是因为这些这地方附近有较大污染源,特别值得一提的是小南湖至西里湖通道,出现了总磷先急剧下降,第4天中午开始又迅速上升的奇异现象。根据经验,作者分析,由于西湖水深平均1.6m,而由藻类等污染物沉积而成底泥厚达1m,故引水时,由于通道狭窄,水流湍急,钱塘江水大量涌入,把悬浮状底泥迅速冲走,至使总磷迅速下降;数天后,由于西湖三面被群山环抱的特殊地理结构,悬浮状底泥等污染物又倒流回笼致使总磷又迅速上升。可见,去掉湖底淤泥特别是悬浮状底泥至关重要。

(5) 约有33个点位总磷浓度变化不显著。这些点大多集中在苏堤两侧,一些环湖岸点位总磷呈上升趋势,这可能是因为水流横向作用,使悬浮状底泥向岸边泛起,更重要的是与外来污染源增加有关。

根据上述分析,引水对改善西湖水质有一定效果,但局部区域受益不明显。因此要提高引水效益还需调整引水流向和流量,同时要增加截污率,堵截污染源,对西湖进行综合治理。

参 考 文 献

- 1 C S Desai and J F Abel. Introduction to finite element method. New York: Van Nostrand Reinhold Co. 1972
- 2 J J Connor & C A Brebbia. Finite element techniques for fluid flow. London: Newnes-Butterworths, 1976
- 3 E Hinton & D R J Owen. Finite element programming. New York: Academic Press, 1977
- 4 T J Chung. Finite element analysis of fluid dynamics. New York: McGraw Hill, 1978
- 5 杨菊生等. 有限元程序设计. 西安: 西安交通大学出版社, 1990
- 6 何金土, 裴洪平等. 杭州西湖水质模型研究. 生物数学学报, 1992, 7(4), 165~168

PREDICTION ON THE DYNAMIC CHANGE OF TOTAL PHOSPHORUS IN WEST LAKE, HANGZHOU

Pei Hongping He Jingtu Wang Weiwei

(College of Biological Sciences, Hangzhou University, Hangzhou 310028)

Abstract

The convection dispersion model, which can calculate the pollutants distribution and the change of their density is presented to predict the dynamic change of total phosphorus in West Lake, Hangzhou within 7 days under normal water-drawing from the Qiantang River. The results of numerical simulation are discussed in detail. It is suggested that the models may have a practical significance for controlling the water environment.

Key Words The convection dispersion model, TP, West Lake (Hangzhou), numerical simulation