

# 日本琵琶湖表面定振波的计算

逢 勇 濮 培 民

(中国科学院南京地理与湖泊研究所, 南京 210008)

**提要** 利用水动力学方程对日本琵琶湖表面定振波进行了计算和分析, 结果表明其主要周期约为 69.5min。另外, 利用实测水位资料, 采用最大熵谱法进行分析, 得到的主要周期约为 68min, 两者吻合很好。

**关键词** 日本琵琶湖 定振波 数值计算 最大熵谱分析

琵琶湖面积 673.8km<sup>2</sup>, 平均水深约 40m。目前, 滋贺、京都、大阪和兵庫等四个地区 1300 万人口的生活用水均依靠该湖, 因此, 是日本最重要的水资源, 为了解决其生态环境的保护问题, 迫切需要对湖中的动量、热量、物质的传输规律进行研究。定振波是湖泊表面具有稳定周期的一种波动。它对湖泊中动量、热量和物质的垂直交换和水平交换具有重要作用。对于定振波的数值计算工作国外在 50 年代就开始研究, 国内张文华等<sup>[1]</sup>也曾在这方面做过许多工作, 但上述工作在利用实测水位资料验证数值计算结果时比较粗糙。本文将最大熵谱法用于实测水位资料振荡频率的计算, 这样不仅对数值计算结果的验证提供了较为客观的标准, 而且还可准确定出定振波中除主频外的其它频率的值。本文利用一维水动力学方程计算了琵琶湖表面定振波周期, 另外, 利用 1993 年 9 月在该湖大桥附近观测到的水位资料, 采用最大熵谱法分析了表面定振波周期, 两者结果吻合很好。

## 1 数值计算

假定湖水密度均一, 并忽略惯性力、柯氏力和摩擦力得一维水动力学方程组为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

实测表明, 上述方程可作为一级近似来描述定振波<sup>[2]</sup>, 式中  $u$  是水平速度在垂直方向上的均值,  $u = \frac{1}{h} \int_0^h u(x, y, z) dz$ ,  $\zeta$  是水质点的垂直位移,  $h$  为水深。由(1)式可得波动方程为:

收稿日期: 1994 年 3 月 16 日; 接受日期: 1994 年 7 月 4 日。

作者简介: 逢勇, 男, 1958 年生, 在读博士生。曾发表“50m 气象塔风、温、湿自动观测系统”、“太湖小气候特征的观测分析”等论文 10 余篇。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

满足在长为  $L$  的长方形湖盆边界上 ( $x=0, x=L$ ),  $x$  方向水平流速为零的条件下的周期性解为:

$$u = u_0 \sin 2\pi \left( \frac{nx}{2L} \right) \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} \right) \quad (3)$$

将(3)代入(2)可得表面定振波的周期  $T$  与湖盆长  $L$  的关系式:

$$T = \frac{2L}{n \sqrt{gh}} \quad (4)$$

式中  $n$  为驻波节点数,式(4)即为常用的梅良(J. R. Merian)公式。

实际湖盆的形状是复杂的,德方特(A. Defant)<sup>[3]</sup>等先后发展了任意形状水域内的驻波理论来研究湖面定振波。为了考虑实际湖盆形态,可以取  $x$  轴沿着湖泊的深水线(不必为一直线)并根据湖面宽度变化情况取一些基本垂直于这个轴的铅直断面,使各断面之间湖面宽度的变化大致可以认为是线性的,取这些  $x$  断面平均流速为:

$$\bar{u} = \frac{1}{s} \int_0^b u(x, y) dy$$

式中  $b$  是  $x$  断面上的水面宽度,  $s$  为铅直断面的面积。平均水平位移  $\eta$  随时间的变化即为平均流速  $\bar{u}$  和铅直流速  $\bar{w}$ 。

$$\bar{u} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \bar{w} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (5)$$

由(5)和(1)式得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial(s\eta)}{\partial x} &= -b\zeta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

方程(6)的周期性解应满足在湖盆两端的水平位移为零的边界条件,可采用差分法来求解(6)式<sup>[4]</sup>。假定  $\eta = \eta_{\max} \cos 2\pi(t/T)$ , 得差分方程组如下:

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \zeta_{i-1} + \frac{(\eta_i + \eta_{i-1})\alpha}{2} \\ q_i &= q_{i-1} - \frac{v_i(\zeta_i + \zeta_{i-1})}{2} \\ \eta_i &= \frac{1}{s_i + \frac{\alpha}{4}v_i} [q_{i-1} - v_i(\zeta_{i-1} + \frac{\alpha}{4}\eta_{i-1})] \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $\alpha = 4\pi^2 \frac{x_i - x_{i-1}}{gT^2}$ ,  $T$  为定振波周期,  $(x_i - x_{i-1})$  为沿深水线  $x$  轴上相邻两个断面  $i$  和  $i-1$  之间的距离;  $q_i$  为单位时间通过  $i$  断面的水容积 ( $q_i = s_i \eta_i$ );  $s_i$  为  $i$  断面的面积;  $v_i$  为  $i$  和  $i-1$  断面之间的湖面面积,  $v_i = (x_i - x_{i-1})b_i$ ,  $b_i$  为  $i$  断面的湖面宽度。

采用迭代法可算得每一断面上的垂直位移  $\zeta_i$  和水平位移  $\eta_i$ , 因为  $\alpha$  中有  $T$  对于不同的  $T$  可得不同的结果, 选择适当的  $T$ , 使得边界条件在湖盆两端的水平位移为零; 在满足得最好时, 就可以定出湖面定振波的周期。由于地形测量和计算误差, 边界条件只能近似满足。

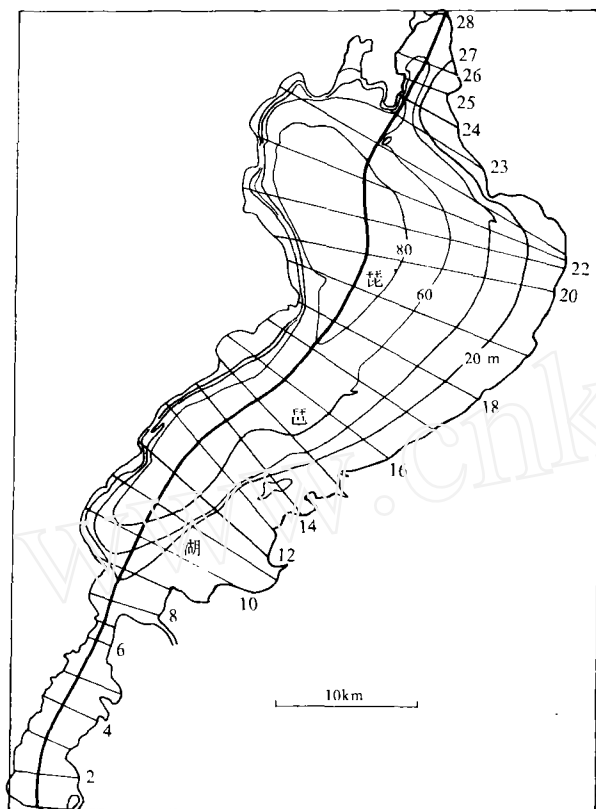


图1 琵琶湖表面定振波计算中的断面位置  
Fig. 1 The sectional location figure  
about the seiche computation in Lake Biwa

按照上述方法,本文计算了琵琶湖的表面定振波,共取28个断面(图1)。深水线总长为65km,计算中取湖面南端的定振波振幅为5cm,算得双节点波的周期为69.5min。图2为琵琶湖表面定振波特征的计算值,可见振幅为零的节点有两个,第一个位于4号节点和5号节点之间,位置在南湖的中部。第二个位于16号和17号节点之间,位置在北湖的中部。在湖的南北两端,水位值最高,水平平均流速( $4\eta/T$ )的最大值为4.9cm/s,在4号节点处,对应于南湖振幅为零的节点。由于水深和湖宽起伏较大,使得水平平均流速曲线呈波动型。显然,大的定振波将产生较大的运动,图中所有标尺将随定振波振幅的增大而增大。

## 2 最大熵谱分析

最大熵谱估计具有分辨率高、峰值偏离小等优点,特别是资料序列较短时,也能取得比较符合实际的频谱,故在时间序列的周期分析中得到较广泛的应用,其计算方法如下<sup>[9]</sup>:

设距平序列  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , 假定采样间隔是相等的,则序列的最大熵谱为:

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_{k_0}^2}{|1 - \sum_{j=1}^{k_0} b_j^* e^{ij\lambda}|^2} \quad (8)$$

式中,  $\lambda = 2\pi s$ ,  $s$  为频率 ( $s = \frac{1}{T}$ ),  $T$  为周期长度,  $i$  为虚数单位, (8) 式中  $\sigma_{k_0}^2$  为对应于截止阶  $k_0$  的预报误差方差,分母为一复数取模后的平方,  $b_j^*$  为过滤系数,也即自回归模型:

$$x_t = b_1^* x_{t-1} + b_2^* x_{t-2} + \dots + b_{k_0}^* x_{t-k_0} + a_t$$

的系数,其递推计算公式为:

$$b_1^1 = \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2)} \quad (9)$$

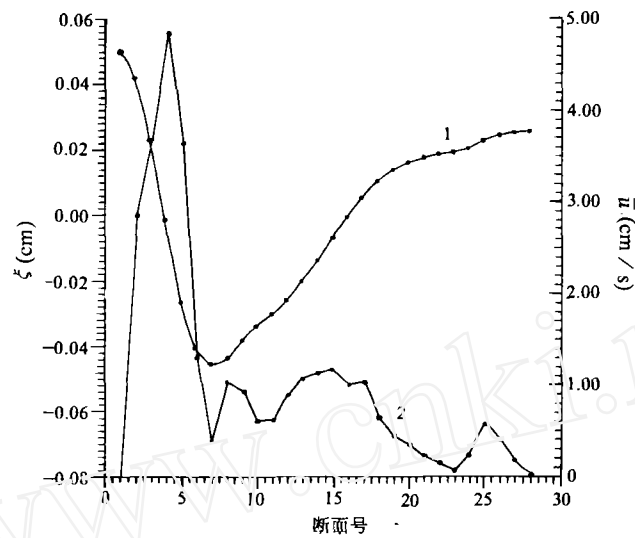


图2 琵琶湖表面定振波特征的计算值

(1) 各断面的铅直位移; (2) 1/4 周期各断面的平均流速

Fig. 2 Computed value about the seiche characters at the sections

(1) vertical displacement; and (2) average current speed in one-fourth periods

$$b_{k+1}^{k+1} = \frac{2 \sum_{i=1}^{n-k-1} [(x_i - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+j})(x_{i+k+1} - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+k+1-j})]}{\sum_{i=1}^{n-k-1} [(x_i - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+j})^2 + (x_{i+k+1} - \sum_{j=1}^k b_j^k x_{i+k+1-j})^2]}, 1 \leq k \leq n-1 \quad (10)$$

 $b_j^{k+1}$  由下面的自回归系数递推公式求得:

$$b_1^2 = b_1^1 - b_2^1 b_1^1 \quad (11)$$

$$b_j^{k+1} = b_j^k - b_{k+1}^{k+1} b_{k+1-j}^k, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (12)$$

(9)、(10)、(11)、(12)组成系数  $b_j$  的递推公式。运用赤池最终预报误差(FPE)准则来定最优截止阶  $k_0$ , 即使:

$$(\text{FPE})_k = \sigma_k^2 [(1 + \frac{k}{n}) / (1 - \frac{k}{n})] \quad (13)$$

达最小来定出  $k_0$ , 式(13)中:

$$\sigma_k^2 = R(0) - \sum_{j=1}^k b_j^k R(j) \quad (14)$$

其中  $R(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-j} x_i x_{i+j}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, k$ ), 为自相关函数, 其递推公式为:

$$R(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$R(1) = b_1^1 R(0)$$

$$R(k+1) = b_{k+1}^{k+1} [R(0) - \sum_{j=1}^k b_j^k R(j)] + \sum_{j=1}^k b_j^k R(k+1-j), \quad 1 \leq k \leq n-2$$

在实际计算中  $k$  值在  $n/10$  一直到  $n+1$  范围内经验地选取。本文对 1993 年 9 月 1 日至

2 日以及 1993 年 9 月 6 日至 7 日在琵琶湖大桥处观测到的两组水位资料(图 3)进行了最大熵谱分析,结果见图 4。从图 4 可以看出,表面定振波的周期为 68min。实际上,从图 3 所示的水位曲线上也可直观地看出这一周期。

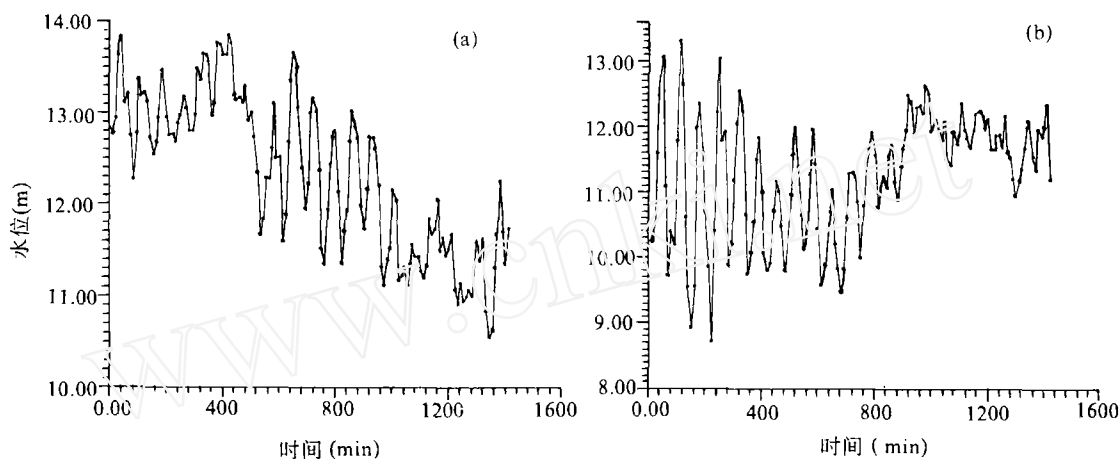


图3 琵琶湖大桥水位实况

(a) 1993 年 9 月 1~2 日; (b) 1993 年 9 月 6~7 日

Fig. 3 The observed water level at the Great Bridge Station of Lake Biwa

(a) Sep. 1~2, 1993 (b) Sep. 6~7, 1993

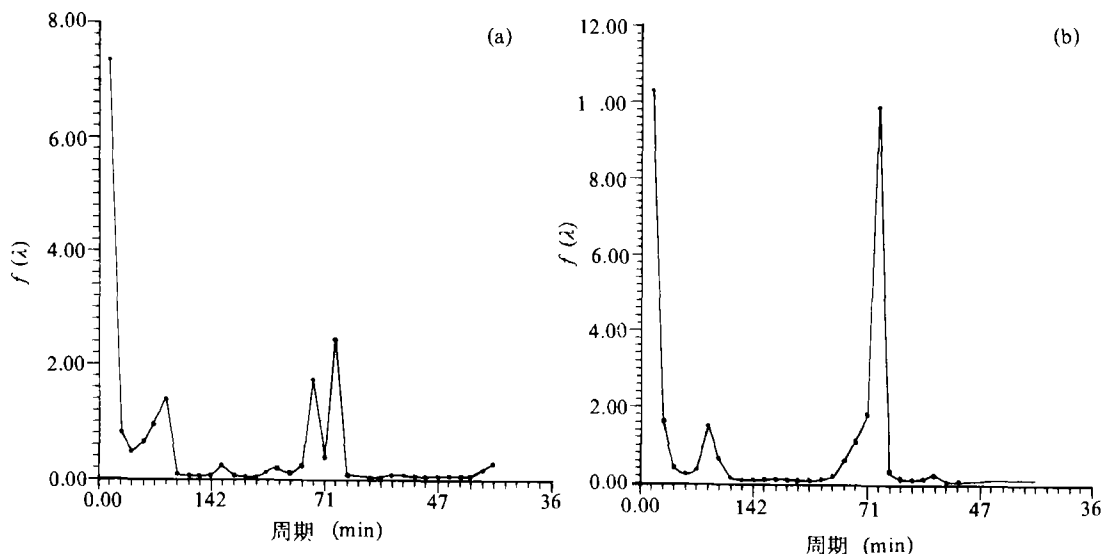


图4 琵琶湖大桥水位波动最大熵谱曲线

(a) 1993 年 9 月 1~2 日; (b) 1993 年 9 月 6~7 日

Fig. 4 Maximum entropy spectrum curve of the observed water level at the Great Bridge Station of Lake Biwa (a) Sep. 1~2, 1993; (b) Sep. 6~7, 1993

### 3 结 语

通过对琵琶湖定振波的数值计算及对实测水位资料的最大熵谱分析,可以初步定出该湖的表面定振波周期约为 68min。波的垂直位移在南湖和北湖的中部达到最小值在湖的南北两岸达最大,水平流速在南湖的中部达最大值。另外,根据冈本严<sup>[6]</sup>的研究,琵琶湖的定振波周期除了约 70min 的以外,还有 30min 和 4h 的周期。因本次观测时水位计置于琵琶湖大桥附近,计算结果也主要为南湖的影响,故其它周期的定振波在本次研究中反映得不明显。确定琵琶湖定振波周期对于了解动量、热量、物质在琵琶湖南北湖之间的交换具有十分重要的意义。

**致谢** 本文是作者参加“国际琵琶湖共同观测(BITEX)”研究的成果之一。工作中得到各国有关科学家的支持和帮助,特别是日本冈山理工大学奥田节夫小组提供水位资料,在此一并致谢。

### 参 考 文 献

- 1 张文华,王银珠. 滇池定振波的初步分析. 海洋湖泊科学文集. 北京:农业出版社,1987. 69~74
- 2 朱海虹等. 云南断陷湖泊环境与沉积. 北京:科学出版社,1989
- 3 Defant B. Eorie der Seiches des Michigansees and ihre abwandlung durch wirkung der corioloskraft. *Arch Met Geophys Bioklimatol*, Wien, A6, 1953; 218~241
- 4 中国科学院南京地理与湖泊研究所主编. 抚仙湖. 北京:海洋出版社,1990
- 5 曹鸿兴,罗乔林. 气象历史序列的最大熵谱分析. 科学通报,1979, (24): 351~355
- 6 冈本严. 琵琶湖调查笔记. 人文书院,1992. 112~122

## OBSERVATION AND COMPUTATION OF SURFACE SEICHE IN LAKE BIWA, JAPAN

Pang Yong Pu Peimin

(Nanjing Institute of Geography and Limnology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008)

### Abstract

The periods of seiche oscillation in Lake Biwa, Japan were computed according to the hydrodynamics equations with the main period being about 69.5 minutes. In addition, the real water level data at the Great Bridge Station were analysed by using the maximum entropy method. The periods acquired was about 68 minute. These results coincided with each other.

**Key Words** Lake Biwa, seiche, numerical computation, maximum entropy analysis